数理解析研究所講究録 1365 巻 2004 年 48-56

Banach環上のJordan homomorphismとその安定性

山形大学工学部　三浦　毅 (Takeshi Miura)
山形大学工学部　髙橋　眞映 (Sin-Ei Takahasi)
Department of Basic Technology, Applied Mathematics and Physics, Yamagata University
日本工業大学（非常勤講師）　平澤　剛 (Go Hirasawa)
Department of Mathematics, Nippon Institute of Technology

定義 A, B を *Banach*環とする．写像 $\rho\colon A \to B$ が *Jordan homomorphism* であるとは，任意の $f, g \in A$ に対して

$$\rho(f+g) = \rho(f) + \rho(g)$$

$$\rho(f^2) = \rho(f)^2$$

をみたすことである．

注意 1 *Jordan homomorphism* は，定義により，連続性及び線型性は仮定されていないことに注意する．例1でみるように，連続でも線型でもないような *Jordan homomorphism* が存在する．

注意 2 $f, g \in A$ (*resp.* B) に対して

$$f \circ g \stackrel{\mathrm{def}}{=} fg + gf$$

により定まる積$\circ$を *Jordan*積と呼ぶ．このとき *Jordan homomorphism* $\rho\colon A \to B$ は *Jordan* 積を保存する：

$$\rho(f \circ g) = \rho(f) \circ \rho(g) \qquad (f, g \in A).$$

実際次の様である．$\rho((f+g)^2)=\{\rho(f)+\rho(g)\}^2$ であるから，両辺を展開して $\rho(f^2)=\rho(f)^2$ 及び $\rho(g^2)=\rho(g)^2$ を用いると

$$\rho(fg+gf)=\rho(f)\rho(g)+\rho(g)\rho(f)$$

を得るが，これは $\rho(f\circ g)=\rho(f)\circ\rho(g)$ を示す．よって *Jordan homomorphism* は *Jordan* 積を保存する．このことから，特に A,B が可換であれば，*Jordan homomorphism* は自動的に積を保存する：

$$\rho(fg)=\rho(f)\rho(g) \quad , \quad (f,g\in A).$$

注意 1 で述べたように，A,B ともに可換ならば Jordan homomorphism $\rho\colon A\to B$ は積を保存する．ある場合には一方が可換でなくとも同様の結果が成り立つ．例えば，以下に示すように，B が複素数全体のなす可換 Banach 環 $\mathbb{C}$ の場合は，A の可換性は必要ではない．実際 I. N. Herstein [3] はより一般的な場合についての結果を得ているため，次の補題 1 は特別な場合に過ぎない．しかしながら完全性を期すため，ここではその証明まで含めて述べることにする．次の論法は W. Żelazko [8, Proof of Theorem 1] と本質的に同じであることに注意する．

補題 1 *A を可換とは限らない Banach 環，$\rho\colon A\to\mathbb{C}$ を Jordan homomorphism とする．このとき ρ は自動的に積を保存する．*

証明　注意 1 で述べたように

$$\rho(xy+yx)=2\rho(x)\rho(y) \qquad (x\in A, y\in A) \tag{1}$$

が成り立つ．(1) は任意の $x, y \in A$ に対して成り立つので，特に x を x^2 に置き換えれば

$$\rho(x^2y + yx^2) = 2\rho(x)^2\rho(y) \tag{2}$$

となる．また y を $xy + yx$ に置き換えれば

$$\rho(x(xy + yx) + (xy + yx)x) = 2\rho(x)\rho(xy + yx),$$

よって(1) とあわせて

$$\rho(x^2y + 2xyx + yx^2) = 4\rho(x)^2\rho(y) \qquad (x \in A, y \in A). \tag{3}$$

(3) から(2) を辺々引けば

$$\rho(xyx) = \rho(x)^2\rho(y) \qquad (x \in A,\ y \in A) \tag{4}$$

を得る．さて，$f \in A$ 及び $g \in A$ を任意に固定し

$$2t = \rho(fg - gf) \tag{5}$$

とおく．このとき(1) 及び(5) より

$$\rho(fg) = \rho(f)\rho(g) + t \quad \text{and} \quad \rho(gf) = \rho(f)\rho(g) - t \tag{6}$$

であるが，さらに(4), (5), (6) から

$$\begin{aligned}
4t^2 &= \rho((fg - gf)^2) \\
&= \rho(fg)^2 - \rho(fg^2f) - \rho(gf^2g) + \rho(gf)^2 \\
&= \{\rho(f)\,\rho(g) + t\}^2 - 2\rho(f)^2\rho(g)^2 + \{\rho(f)\,\rho(g) - t\}^2 \\
&= 2t^2;
\end{aligned}$$

したがって $t=0$，つまり $\rho(fg)=\rho(gf)$ である．よって(1)より $\rho(fg)=\rho(f)\rho(g)$，すなわち ρ は積を保存する． ■

系 2 A を可換とは限らない *Banach* 環，B を半単純可換 *Banach* 環とする．このとき *Jordan homomorphism* $\rho\colon A\to B$ は自動的に積を保存する．

証明 M_B を B の極大イデアル空間とする．このとき各 $x\in M_B$ に対して写像 $\rho_x\colon A\to\mathbb{C}$ を次で定める：

$$\rho_x(f)=\widehat{\rho(f)}(x) \qquad (f\in A).$$

ここに $\hat{\cdot}$ は *Gelfand* 変換である．いま ρ が *Jordan homomorphism* であることから，各 $x\in M_B$ に対して ρ_x も *Jordan homomorphism* であることが分かる；したがって，補題 1 より，ρ_x は積を保存する．つまり

$$\widehat{\rho(fg)}(x)=\widehat{\rho(f)}(x)\,\widehat{\rho(g)}(x) \qquad (f,g\in A, x\in M_B).$$

いま B は半単純であるから $\rho(fg)=\rho(f)\rho(g)$ を得る． ■

以下では Jordan homomorphism のある種の安定性について考察する．そのため，まず加法的写像の安定性に関する次の結果を述べる．

定理 A (D. H. Hyers, T. M. Rassias and Z. Gajda) E_1, E_2 を実 *Banach* 空間，$\delta\geq 0$, $p\geq 0: p\neq 1$ とする．（連続とも線形とも限らない）写像 $\phi\colon E_1\to E_2$ が次をみたすとする：

$$\|\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)\|\leq\delta(\|x\|^p+\|y\|^p) \qquad (x,y\in E_1).$$

このとき次をみたす加法的写像$T\colon E_1 \to E_2$が唯一つ存在する：

$$\|\phi(x) - T(x)\| \leq \frac{2\delta}{|2-2^p|}\|x\|^p \qquad (x \in E_1).$$

定理Aは1940年にS. M. Ulamにより出された問題（[7]参照）に対する1つの解答である．実際，D. H. Hyers [4]は1941年に$p=0$の場合を，T. M. Rassias [5]は1978年に$0 \leq p < 1$の場合をそれぞれ示した．その後Z. Gajda [2]は$1 < p < \infty$に対しても同様の結果が成り立つことを示すとともに，$p=1$に対する反例を与えた．

以下では，Hyers-Rassias-Gajdaと同様な意味での摂動をJordan homomorphismについて考察し，その安定性について論ずる．このとき，R. Badora [1]の手法を応用し，若干の問題点を解消することにより，次の結果が得られた：

定理 3 A, Bを可換とは限らない*Banach*環，$\delta \geq 0$, $p \geq 0 : p \neq 1$とする．このとき写像$\phi\colon A \to B$が

$$\|\phi(f+g) - \phi(f) - \phi(g)\| \leq \delta(\|f\|^p + \|g\|^p) \qquad (f, g \in A)$$

$$\|\phi(f^2) - \phi(f)^2\| \leq \delta\|f\|^{2p} \qquad (f \in A) \tag{7}$$

をみたせば，次のような*Jordan homomorphism* $\rho\colon A \to B$が唯1つ存在する：

$$\|\rho(f) - \phi(f)\| \leq \frac{2\delta}{|2-2^p|}\|f\|^p \qquad (f \in A).$$

証明 まず定理Aにより次をみたす加法的写像$\rho\colon A \to B$が唯1つ存在する：

$$\|\phi(f) - \rho(f)\| \leq \frac{2\delta}{|2-2^p|}\|f\|^p \qquad (f \in A). \tag{8}$$

この ρ が求める *Jordan homomorphism* であることを以下で示す.

$f \in A$ を任意に取り固定し, $s = |1-p|/(1-p)$ とおく. このとき $0 \leq p < 1$ ならば $s = 1$, $p > 1$ ならば $s = -1$ であることに注意する. ρ は加法的なので, (8) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \|n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) - \rho(f^2)\| &= \|n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) - n^{-2s}\rho(n^{2s}f^2)\| \\ &\leq n^{-2s}\frac{2\delta}{|2-2^p|}\|n^{2s}f^2\|^p, \end{aligned}$$

すなわち

$$\|n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) - \rho(f^2)\| \leq n^{2s(p-1)}\frac{2\delta}{|2-2^p|}\|f^2\|^p \tag{9}$$

である. 同様にして, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|n^{-s}\phi(n^s v) - \rho(f)\| \leq n^{s(p-1)}\frac{2\delta}{|2-2^p|}\|f\|^p. \tag{10}$$

となることが分かる. ここで s の取り方から $s(p-1) < 0$ なので, (9) 及び(10) と併せて

$$\rho(f^2) = \lim_{n\to\infty} n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) \ \ and \ \ \rho(f) = \lim_{n\to\infty} n^{-s}\phi(n^s f) \tag{11}$$

を得る. また(7) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\|\phi(n^{2s}f^2) - \phi(n^s f)^2\| \leq \delta\|n^s f\|^{2p}$ が成り立つ. したがって, $s(p-1) < 0$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} n^{-2s}\left(\phi(n^{2s}f^2) - \phi(n^s f)^2\right) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} n^{2s(p-1)}\delta\|f\|^{2p} = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

を得る．以上より(11)及び(12)から

$$
\begin{aligned}
\rho(f^2) &= \lim_{n\to\infty} n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{n^{-2s}\phi(n^{2s}f^2) - n^{-2s}\left(\phi(n^{2s}f^2) - \phi(n^s f)^2\right)\right\} \\
&= \left\{\lim_{n\to\infty} n^{-s}\phi(n^s f)\right\}^2 = \rho(f)^2
\end{aligned}
$$

となる．$f \in A$ は任意であったので，ρ が *Jordan homomorphism* であることが示された．■

例 1 G を *Jordan homomorphism* $\rho\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ で，さらに全射であるもの全体の集合とする．例えば恒等写像 z 及び複素共役 $\bar{z}$ は G の元であるから，G は空集合でない．簡単な計算により，連続な *Jordan homomorphism* は $z, \bar{z}$ と零写像だけであることが分かる．さらに，よく知られていることではあると思うが，驚くべきことに

$$\sharp G = 2^{\sharp\mathbb{C}}$$

である．ここに $\sharp$ は集合の濃度である．つまり，和や二乗を保存するばかりでなく全射性を仮定した写像は，代数構造や連続性などを保存するとは限らない“単なる写像”と同じだけあることを示している．

例 2 定理3と同様の結果は $p = 1$ に対しては成り立たない．実際 P. Šemrl *[6]* は各 $\delta > 0$ に対して次のような関数 $\phi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を構成した：

(a) ϕ は連続かつ積を保存する．

(b) $|\phi(x+y) - \phi(x) - \phi(y)| \le \delta(|x| + |y|) \qquad (x, y \in \mathbb{C})$.

(c) いかなる *Jordan homomorphism* $\rho\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ に対しても

$$\sup_{x\in\mathbb{C}\setminus\{0\}} \frac{|\phi(x) - \rho(x)|}{|x|} \ge 1.$$

例2では積を保存するばかりか連続な写像により，定理3の$p=1$に対する反例が与えられているが，この連続性はむしろ次の意味で必然的であることが分かる．

定理 4 Aを可換とは限らない*Banach*環，$\delta \geq 0$とする．このとき写像$\phi\colon A \to \mathbb{C}$が

$$|\phi(x+y)-\phi(x)-\phi(y)| \leq \delta(\|x\|+\|y\|) \qquad (x, y \in A)$$

$$|\phi(x^2)-\phi(x)^2| \leq \delta\|x\|^2 \qquad (x \in A)$$

をみたせば，ϕは*Jordan homomorphism*であるか，あるいは

$$\sup_{x \in A\setminus\{0\}} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|} \leq \frac{1+\sqrt{1+4\delta}}{2}$$

となる．

参考文献

[1] R. Badora, *On approximate ring homomorphisms*, J. Math. Anal. Appl. **276** (2002), 589–597.

[2] Z. Gajda, *On stability of additive mappings*, Internat. J. Math. Math. Sci., **14** (1991), 431-434.

[3] I. N. Herstein, *Topics in Ring Theory*, Chicago Lectures in Mathematics, Chicago and London, The University of Chicago Press.

[4] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **27** (1941), 222-224.

[5] T. M. Rassias, *On the stability of the linear mapping in Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 297-300.

[6] P. Šemrl, *Non linear perturbations of homomorphisms on* $C(X)$, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50** (1999), 87–109.

[7] S. M. Ulam, *A collection of mathematical problems*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 8, Interscience, New York-London, 1960.

[8] W. Żelazko, *A characterization of multiplicative linear functionals in complex Banach algebras*, Studia. Math. **30** (1968), 83–85.